

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.

Definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej:

W rozważaniach geometrycznych zwykle rozpatruje się funkcje trygonometryczne kąta, natomiast w rozważaniach algebraicznych (analitycznych) przyjmuje się, że argumentami funkcji trygonometrycznych są liczby rzeczywiste.

Niech x oznacza miarę łukową kąta α . Wtedy $\alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$

Wówczas funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej x definiujemy następująco:

sinusem	-, -	kosinus	-, -
tangensem	-, -	tangens	-, -
kotangensem	-, -	kotangens	-, -

A zatem:

$$\text{sinus: } x \longrightarrow y = \cos \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$D_{\sin} = \mathbb{R}$$

$$\text{kosinus: } x \longrightarrow y = \cos \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$D_{\cos} = \mathbb{R}$$

$$\text{tangens: } x \longrightarrow y = \operatorname{tg} \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$D_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{kotangens: } x \longrightarrow y = \cos \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$D_{\operatorname{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{ x : x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{C} \}$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych:

Obrót końcowego ramienia kąta o całkowitą wielokrotność kąta pełnego (360°) nie zmienia wartości funkcji trygonometrycznych, i tak:

$$\sin 30^\circ = \sin(30^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \sin(30^\circ + (-2) \cdot 360^\circ) = \sin(30^\circ + (-100) \cdot 360^\circ) = \dots \text{itp}$$

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 1830^\circ = \sin(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Stąd:

$$\sin \alpha = \sin(k \cdot 360^\circ + \alpha_0) \quad \alpha_0 \in \langle 0, 360^\circ \rangle$$

$$\sin x = \sin(k \cdot 2\pi + x_0) \quad x_0 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\cos \alpha = \cos(k \cdot 360^\circ + \alpha_0)$$

$$\cos x = \cos(k \cdot 2\pi + x_0)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(k \cdot 360^\circ + \alpha_0) \quad \alpha \neq (2k+1) \cdot 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(k \cdot 2\pi + x_0) \quad x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(k \cdot 360^\circ + \alpha_0) \quad \alpha \neq 2k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(k \cdot 2\pi + x_0) \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$$

Przykład:

$$\text{Oblicz } \sin \frac{13}{6} \pi$$

$$\text{I sp.: } \sin \frac{13}{6} \pi = \sin \frac{\frac{13}{6} \pi \cdot 180^\circ}{\pi} = \sin 390^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{II sp.: } \sin \frac{13}{6} \pi = \sin(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{25}{3} \pi = \cos(8\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

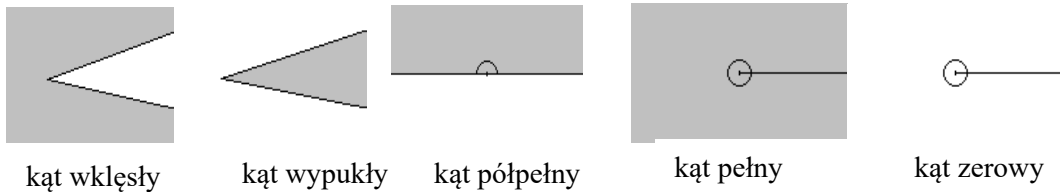
$$\operatorname{tg} \frac{601}{3} \pi \operatorname{tg}(200\pi + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(100 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 128 \frac{1}{4} \pi = \operatorname{ctg}(128\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(64 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$$

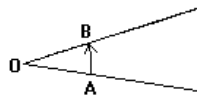
$$\operatorname{tg}(-4 \frac{1}{3} \pi) = -\operatorname{tg}(4 \frac{1}{3} \pi) = -\operatorname{tg}(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sin(-4 \frac{1}{2} \pi) = -\sin(4 \frac{1}{2} \pi) = -\sin(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

Kątem nazywamy sumę dwóch półprostych o wspólnym początku i części płaszczyzny wyciętej przez te półproste



Kątem skierowanym nazywamy kąt z ustaloną kolejnością ramion.

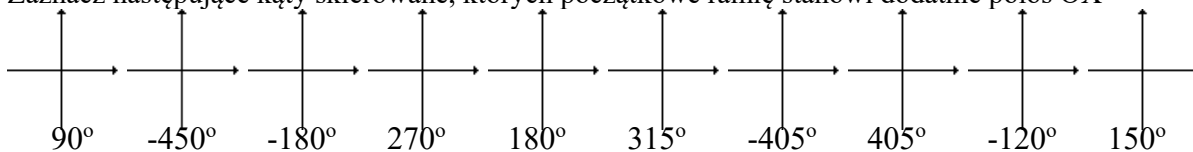


OA - ramię początkowe kąta
OB. - ramię końcowe kąta

Kąty skierowane powstające na skutek obrotu końcowego ramienia w kierunku przeciwnym (zgodnym) do kierunku ruchu wskazówek zegara uznajemy za dodatnie (ujemne).

Ćwiczenie:

Zaznacz następujące kąty skierowane, których początkowe ramię stanowi dodatnie półoś OX



DEFINICJE FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH DOWOLNEGO KĄTA SKIEROWANEGO:

Niech α będzie dowolnym kątem skierowanym. Wówczas:

sinusem [kosinusem] kąta α nazywamy stosunek rzędnej [odciętej] punktu dowolnie wybranego na końcowym ramieniu kąta α do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

tangensem [kotangensem] kąta α nazywamy stosunek rzędnej [odciętej] punktu dowolnie obranego na końcowym ramieniu kąta do odciętej [rzędnej] tego punktu różnej od zera

Uwaga: Funkcja tangens[kotangens] nie jest określona dla kątów których odcięta [rzędna] punktów leżących na końcowym ramieniu jest równa zero, a więc dla kątów, których końcowe ramię zawarte jest w osi rzędnych, a więc dla kątów postaci $\alpha = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, \dots$ tzn. $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{C}$

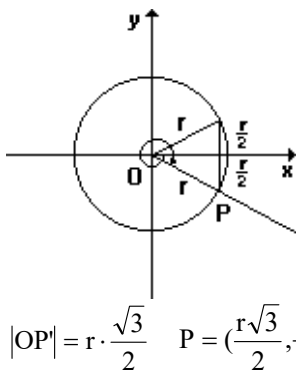
[$\alpha = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots$ tj. $\alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{C}$]

Zatem:

$$D_{\text{tg}} = \{\alpha : \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{C}\}$$

$$D_{\text{ctg}} = \{\alpha : \alpha \neq k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{C}\}$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = -390^\circ$ (dom.: $-420^\circ, 120^\circ, -60^\circ$)



$$\sin(-390^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{r}{2}}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-390^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}(-390^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -$$

$$\text{ctg}(-390^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{-\frac{r}{2}} = -\sqrt{3}$$