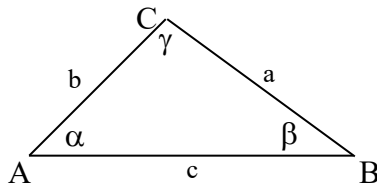


TWIERDZENIE COSINUSÓW

W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków przez cosinus kąta zawartego między nimi.



Teza:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

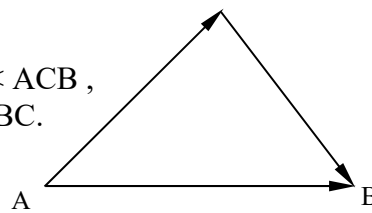
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad /*$$

DOWÓD TWIERDZENIA COSINUSÓW

(dla dowodu wystarczy pokazać np. równość *, pozostałe wykazuje się analogicznie)

Jeżeli punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta,

to *: $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2 - 2 \cdot |\vec{BC}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \angle ACB$,
gdzie $\angle ACB$ jest kątem wewnętrznym trójkąta ABC.



Zauważam, że wektor $\vec{AB}$ jest sumą wektorów $\vec{AC}$ i $\vec{CB}$ tj. $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.

Wobec tego z własności iloczynu skalarnego wektorów otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{AB}|^2 = (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AC} + 2(\vec{AC} \cdot \vec{CB}) + \vec{CB} \cdot \vec{CB} = \\ &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 - 2(\vec{CA} \cdot \vec{CB}), \text{ gdyż } \vec{CA} = -\vec{AC} \end{aligned}$$

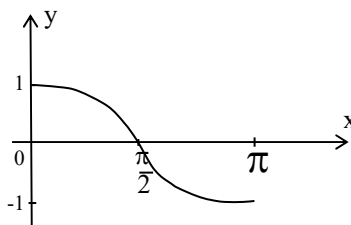
$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos \angle ACB = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \angle ACB, \text{ a stąd}$$

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2 - 2 \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \angle ACB$$

WNOISKI Z TWIERDZENIA COSINUSÓW:

α - kąt trójkąta

$$\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$$



$$\begin{array}{c} \text{Diagram of an acute angle } \alpha \\ \cos \alpha > 0 \\ \alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of an obtuse angle } \alpha \\ \cos \alpha < 0 \\ \alpha \in (90^\circ, 180^\circ) \end{array}$$

I. $\alpha = 90^\circ$

(trójkąt prostokątny)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ, \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

$$\text{Zatem: } a^2 = b^2 + c^2$$

Kwadrat długości boku leżącego naprzeciw kąta prostego jest równy sumie kwadratów pozostałych boków.

II. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

(trójkąt ostrokątny)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha < b^2 + c^2$$

$$\text{Zatem: } a^2 < b^2 + c^2$$

Kwadrat długości boku leżącego naprzeciw kąta ostrego jest mniejszy od sumy kwadratów pozostałych boków.

III. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

(trójkąt rozwartokątny)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha > b^2 + c^2$$

$$\text{Zatem: } a^2 > b^2 + c^2$$

Kwadrat długości boku
leżącego naprzeciw kąta
rozwartokątnego jest
większy od sumy kwadratów
pozostałych boków.