

Własności logarytmów

Ćwiczenie 1:

$\log_5 1 = \dots$, ponieważ

$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 = \dots$, ponieważ

$\log_{-1} 1 = \dots$, ponieważ

Własność 1: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, to $\log_a 1 = \dots$

Logarytm liczby 1 jest zawsze równy

Ćwiczenie 2:

$\log_5 5 = \dots$, ponieważ

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \dots$, ponieważ

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = \dots$, ponieważ

Własność 2: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, to $\log_a a = \dots$

Logarytm podstawy jest równy

Ćwiczenie 3a):

$\log_3 3^x = \dots$

Własność 3: Jeżeli $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, to $\log_a a^x = \dots$

Logarytm potęgi podstawy jest równy wykładnikowi tej potęgi.

Ćwiczenie 3b):

$\log_5 5^2 = \dots$, $\log_9 81 = \log_9 9^2 = \dots$, $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \dots$, $\log_{0,1} 0,01 = \dots$, $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \dots$

Ćwiczenie 4:

$2^{\log_2 5} = \dots$

$3^{\log_3 \frac{1}{2}} = \dots$

Własność 4: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+$, to $a^{\log_a b} = \dots$

Własność 5: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Logarytm iloczynu liczb jest równy logarytmów czynników tego przy tej samej podstawie.

dowód: Korzystając z tożsamości: $a^{\log_a b} = b$ dla $a \in \dots$ i $b \in \dots$ otrzymujemy: $a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} \dots = a^{\log_a x + \dots}$

Skorzystaliśmy z faktu: iloczyn potęg o jednakowych podstawach jest równy potędze o tej samej i wykładniku będącym

..... wykładników potęg czynników tego iloczynu. Ponieważ funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, więc równość: $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \dots}$ jest równoważna równości $\log_a(xy) = \log_a x + \dots$, co należało wykazać.

Własność 6: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Logarytm ilorazu liczb jest równy logarytmów dzielnej i dzielnika przy tej samej podstawie.

dowód: $a^{\log_a \frac{x}{y}} = \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

Własność 7: Jeżeli $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$ i $p \in \mathbb{R}$, to $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

Logarytm potęgi liczby równa się logarytmu tej liczby przy tej samej podstawie przez wykładnik

dowód: $a^{\log_a x^p} = x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \cdot \dots}$ dla $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+$ i $p \in \mathbb{R}$

Ponieważ funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, to równość $a^{\log_a x^p} = a^{p \cdot \dots}$ jest równoważna równości:

Własność 8: Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $c \in \mathbb{R}_+$, to $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Wzór ten nazywamy wzorem na zmianę podstawy logarytmu.

Pobrano ze strony: <http://jolanta.wilmanowicz.pl>