

Twierdzenie Cevy: Jeżeli A_1, B_1, C_1 są punktami należącymi odpowiednio do boków: $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ trójkąta ABC , to proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie, wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

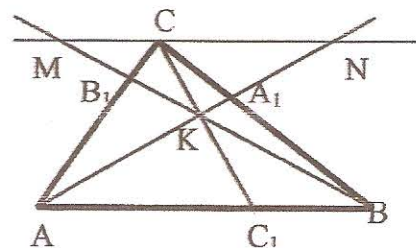
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$$

Dowód „ $\Rightarrow$ ”

Dany jest trójkąt ABC , zaś punkty A_1, B_1, C_1 należą odpowiednio do boków: $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{BA}$ tego trójkąta.

Założenia: $\overline{AA_1} \cap \overline{BB_1} \cap \overline{CC_1} = \{K\}$

Teza: $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$ ①



Dowód: dla dowodu dorysujemy prostą c , $c \parallel \overline{AB}$, tak że $C \in c$.

$\triangle AC_1K \sim \triangle NKC$ i otrzymujemy: $\frac{|AC_1|}{|CN|} = \frac{|C_1K|}{|CK|}$

$\Rightarrow \frac{|AC_1|}{|CN|} = \frac{|C_1B|}{|MC|} \Rightarrow \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|CN|}{|CM|}$ ②

$\triangle C_1BK \sim \triangle CKM$ i otrzymujemy: $\frac{|C_1B|}{|MC|} = \frac{|C_1K|}{|CK|}$ ③

$\triangle ABA_1 \sim \triangle NA_1C$ i otrzymujemy: $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CN|}$ ④

$\triangle ABB_1 \sim \triangle CB_1M$ i otrzymujemy: $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CM|}{|AB|}$ ⑤

Zatem: $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CN|}{|MC|} \cdot \frac{|AB|}{|CN|} \cdot \frac{|CM|}{|AB|} = 1$ ⑥

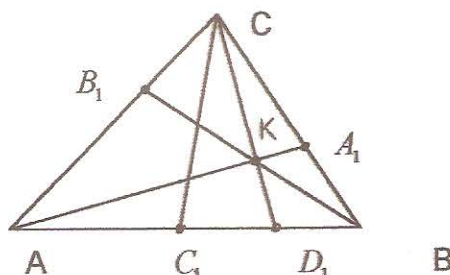
d-d „ $\Leftarrow$ ”

Założenie : $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (*)$

(Zdanie p)

Teza: proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie

(zdanie q)



d-d oparty na prawie logicznym: $[\neg(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Rozpatrzmy zdanie $p \wedge \neg q$. Brzmi ono tak: zachodzi równość $(*)$ i proste AA_1, BB_1, CC_1 Nie przecinają się w jednym punkcie ⑦

Niech $\overline{AA_1} \cap \overline{BB_1} = \{K\}$. Przeprowadźmy prostą CK i niech $\{D_1\} = \overline{CK} \cap \overline{AB}$.

Skoro z założenia : proste AA_1, BB_1, CC_1 Nie przecinają się w jednym punkcie. ⑧

Tó punkt $C_1 \neq D_1$. Proste AA_1, BB_1, CD_1 przecinają się w jednym punkcie, to

Z powyżej udowodnionego twierdzenia („ $\Rightarrow$ ”) otrzymujemy:

(a ponadto z założenia)

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{9} \quad \frac{|AD_1|}{|D_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \\ \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|AD_1|}{|D_1B|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$$

następnie „do obu stron otrzymanej równości dodajemy „1”.

$$\begin{aligned} \frac{|AD_1|}{|D_1B|} + 1 &= \frac{|AC_1|}{|C_1B|} + 1 \\ \frac{|AD_1| + |D_1B|}{|D_1B|} &= \frac{|AC_1| + |C_1B|}{|C_1B|} \\ \frac{|AB|}{|D_1B|} &= \frac{|AB|}{|C_1B|} \end{aligned}$$

$|D_1B| = |C_1B|$ a ze względu na położenie punktów C_1 i D_1 otrzymujemy równość $C_1 = D_1$.

KOMENTARZ :

Ponieważ zdanie $p \wedge \neg q$ jest fałszywe, a ma tę samą wartość logiczną,

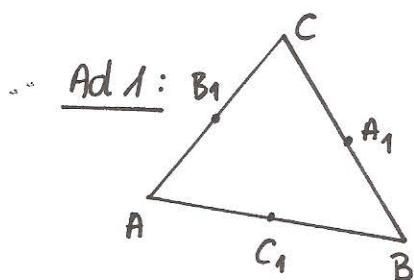
Co zdanie $\neg(p \Rightarrow q)$, to zdanie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe 10, co należało Wykazać.

PROBLEM:

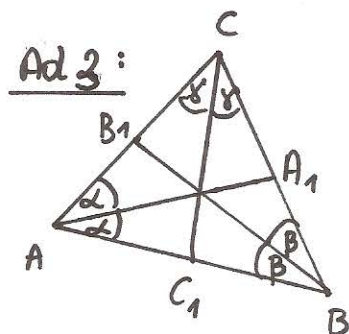
Udowodnij, stosując twierdzenie Cevy, że:

1. środkowe
2. wysokości
3. dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

(problem do pracy w grupach na pozostałą część lekcji)

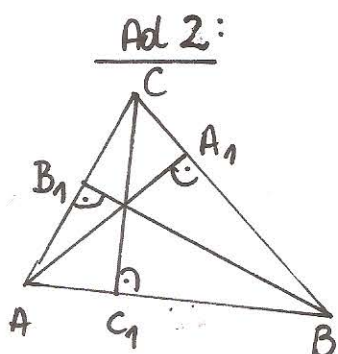


Skoro $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$, to bezpośrednio z tw. Cevy wynika, że środkowe $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ przecinają się w jednym punkcie ■



Następnie: równość 1 otrzymujemy z twierdzenia o dwusiecznej:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1 \quad \blacksquare$$



$$\begin{aligned} \text{Następnie: } \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} &= \\ &= \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$