



Politechnika Śląska w Gliwicach
Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej" edycja 2017/2018
Zadania z matematyki - etap I

1. Rozwiązać równanie

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$$

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[2018]{n^{2018} - n^{2017}} \right).$$

3. Przedstawić na płaszczyźnie zbiór punktów (x, y) spełniających równanie

$$[x]^2 + [y^2] = 10,$$

gdzie $[x]$ oznacza zaokrąglenie w dół (podłogę) a $\lceil x \rceil$ zaokrąglenie w górę (sufit) liczby x .

4. Rozwiązać równanie

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = 4,$$

gdzie

$$a_n = n \cdot \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}.$$

Rozwiązania zadań I etapu z matematyki edycji 2017/2018
Konkursu „O ślady indeks Politechniki Śląskiej”

Zadanie 1: Rozwiązać równanie $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

I sposób: $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
 $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$
 $\underbrace{\sin^2 x}_{\geq 0} \underbrace{(\sin x - 1)}_{\leq 0} = \underbrace{\cos^2 x}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \cos x)}_{\geq 0}$
 $\leq 0 \qquad \geq 0$

Skoro lewa strona równości przyjmuje wartości niedodatnie, prawa - nieujemne, to równość zachodzi tylko wtedy, gdy obie strony są równe 0, a tak jest gdy:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin x - 1 = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \\ &\text{brak rozwiązań} \qquad x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C} \qquad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C} \qquad \text{brak rozwiązań} \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

Dla serii $x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$

$$L = \sin^3(k \cdot 2\pi) + \cos^3(k \cdot 2\pi) = 0 + 1 = 1 = P$$

Dla serii $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$:

$$L = \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^3\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 1 + 0 = 1 = P$$

Odp. Podane równanie spełniają dwie serie liczb

$$x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C} \qquad \text{ oraz } \qquad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$$

I sposób (ale trochę inne przekształcenia)

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (\sin x - 1) + \cos^2 x (\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\sin x - 1) + (1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 0$$

$$(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\sin x - 1) + (\sin x - 1)(1 + \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$$(1 - \cos x)(\sin x - 1)[1 + \cos x + 1 + \sin x] = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\sin x = 1$$

$$x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$\cos x + \sin x = -2$$

(nie spełnione, bo $\sin$ i $\cos$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości -1.)

Zadanie 1 (II sposób)

Mając na uwadze wzory: $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,

rozwiązanie równania sprowadzamy do równania z niewiadomą

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, otrzymując równanie:

$$(*) \quad \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^3 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^3 = 1$$

R-nie to istnieje dla tych x , dla których istnieje $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Stąd: $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ istnieje $\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C} \Leftrightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$

Najpierw sprawdzimy, czy linij postaci $\pi + k \cdot 2\pi$, które „usunęliśmy” z reguły wykonanego podstawienia, spełniają r-nie:

$$L = \sin^3(\pi + k \cdot 2\pi) + \cos^3(\pi + k \cdot 2\pi) = 0 + (-1)^3 = -1 \neq P. \quad (\text{nie spełniające})$$

$$(*) \quad \frac{8t^3 + 1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{(1+t^2)^3} - 1 = 0$$

$$\frac{8t^3 + 1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6 - 1 - 3t^2 - 3t^4 - t^6}{(1+t^2)^3} = 0$$

$$\frac{-2t^6 + 8t^3 - 6t^2}{(t^2+1)^3} = 0$$

$$-2t^6 + 8t^3 - 6t^2 = 0 \quad |:2$$

$$t^2(-t^4 + 4t - 3) = 0$$

$$t^2 = 0 \quad \vee \quad -t^4 + 4t - 3 = 0$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t^4 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)^2(t^2+2t+3) = 0$$

$$t = 1 \quad \vee \quad t^2 + 2t + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 < 0$$

brak rozwiązań

$$t = 0$$

lub

$$t = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}$$

$$x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{C}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$$

odp. Rozwiązaniem równania
lub $x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$

$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ są dwie serie
oraz $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$

Zadanie 1

III sposób (jeszcze nie tak dawno w szkołach badano się przebieg zmiennosci funkcji trygonometrycznych)

$$(*) \sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Rozwiązaniem równania są te argumenty x , dla których funkcja występująca po lewej stronie równania przyjmuje wartość równą 1.

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \quad D_f = \mathbb{R}$$

Wyznamy miejsca zerowe funkcji f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \sin^3 x + \cos^3 x &= 0 \\ (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) &= 0 \\ \sin x + \cos x &= 0 \quad \vee \quad \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \\ \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 0 & 1 - \sin x \cdot \cos x &= 0 \\ 2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} &= 0 & \sin x \cdot \cos x &= 1 \\ 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 & 2 \sin x \cdot \cos x &= 2 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 & \sin 2x &= 2 \\ x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C} & r - \text{nie spelnione} \\ x_0 &= \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Badam w-k konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x + 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{C} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C} \quad 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} = 0$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

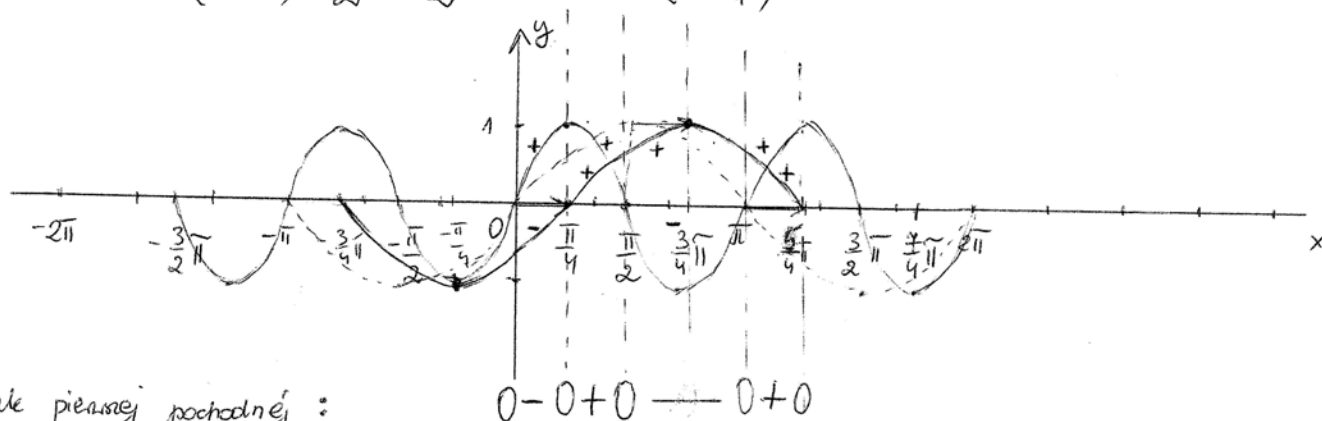
$$x - \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{C}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$$

w-k wystarczający:

$$f'(x) = 3\sin x \cdot \cos x (\sin x - \cos x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot 2 \cdot \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} =$$

$$= 3\sin 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



znaki pierwszej pochodnej:

Sprawdzenie drugiego warunku wystarczającego na istnienie ekstremum funkcji:

$$\begin{aligned} f''(x) &= [3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)]' = 3 [(\sin x \cos x)' (\sin x - \cos x) + \sin x \cos x (\sin x - \cos x)'] = \\ &= 3 [(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x (\cos x + \sin x)] = \\ &= 3 [(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x (\cos x + \sin x)] = \\ &= 3(\cos x + \sin x)(-(\cos x - \sin x)^2 + \sin x \cos x) = \\ &= 3(\cos x + \sin x)(-\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x + \sin x \cos x) = \\ &= 3(\cos x + \sin x)(-1 + 3 \sin x \cos x) \end{aligned}$$

dla $x = k\pi, k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f''(k\pi) &= 3(\cos(k\pi) + \sin(k\pi))(-1 + 3 \sin(k\pi) \cos(k\pi)) = \\ &= \begin{cases} 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3 & \text{dla } k \text{ - parzystego (max)} \\ 3 & \text{dla } k \text{ - nieparzystego (min)} \end{cases} \end{aligned}$$

dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

$$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 3(\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))(-1 + 0) = \begin{cases} 3 & k \text{ - nieparzyste (min)} \\ -3 & k \text{ - parzyste (max)} \end{cases}$$

dla $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}$

$$f''(\frac{3\pi}{4} + k\pi) = 3(\cos(\frac{3\pi}{4} + k\pi) + \sin(\frac{3\pi}{4} + k\pi))(-1 + 0) = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{2}}{2} & k \text{ - parzyste (min)} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & k \text{ - nieparzyste (max)} \end{cases}$$

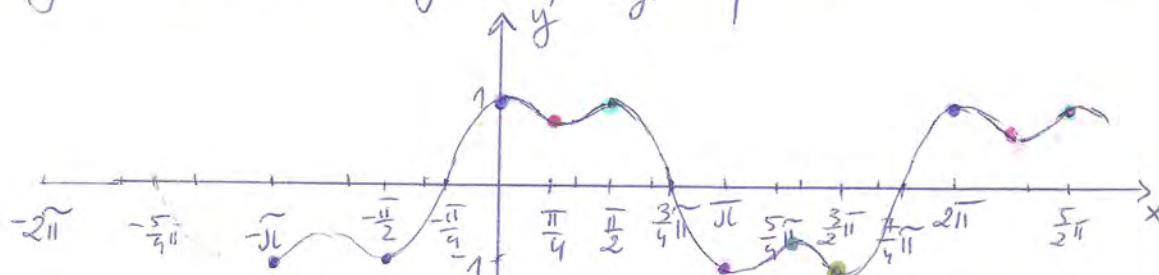
Ponadto:

$$f(k\pi) = \begin{cases} -1 & k \text{ - nieparzyste} \\ 1 & k \text{ - parzyste} \end{cases}$$

$$f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{cases} -1 & k \text{ - nieparzyste} \\ 1 & k \text{ - parzyste} \end{cases}$$

$$f(\frac{3\pi}{4} + k\pi) = \begin{cases} \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} & k \text{ - parzyste} \\ & k \text{ - nieparzyste} \end{cases}$$

Po uwzględnieniu tych uzyskanych informacji o funkcji f możemy naszkicować wykres funkcji f



Funkcja f przyjmuje wartość równą 1 dla $x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2:

Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right)$.

Zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia (jest on też w tablicach CKE)

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

otnyemy:

$$\left(n - \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right) \cdot \left(n^{2017} + n^{2016} \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} + \dots + n \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}}^{2016} + \left(\sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right)^{2017} \right) = \cancel{n^{2018}} - \cancel{n^{2017}}$$

Stąd:

$$\left(n - \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right) = \frac{n^{2017}}{n^{2017} + n^{2016} \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} + \dots + n \left(\sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right)^{2016} + \left(\sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right)^{2017}}$$

$$= \frac{n^{2017}}{n^{2017} + n^{2016} \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} + \dots + n \cdot \left(\sqrt[n^{2018}]{n^{2018} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \right)^{2016} + \left(\sqrt[n^{2018}]{n^{2018} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \right)^{2017}}$$

$$= \frac{n^{2017}}{n^{2017} + n^{2016} \cdot n \cdot \sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} + \dots + n \cdot n^{2016} \cdot \left(\sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} \right)^{2016} + n^{2017} \left(\sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} \right)^{2017}}$$

$$= \frac{\cancel{n^{2017}}}{\cancel{n^{2017}} \cdot \left[1 + \sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} + \dots + \left(\sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} \right)^{2016} + \left(\sqrt[n^{2018}]{1 - \frac{1}{n}} \right)^{2017} \right]} \rightarrow \frac{1}{2018}$$

$\downarrow 1 \quad \quad \quad \downarrow 1 \quad \quad \quad \downarrow 1$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[n^{2018}]{n^{2018} - n^{2017}} \right) = \frac{1}{2018}$$

Zadanie 3: Przedstawić na płaszczyźnie zbiór punktów

(x, y) spełniających równanie:

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lceil y^2 \rceil = 10,$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza zaokrąglenie w dół (podłoga) a $\lceil y^2 \rceil$ zaokrąglenie w górę (sufit) liczby x .

$$\lceil y^2 \rceil = 10 - \lfloor x \rfloor^2$$

$$\geq 0 \quad 10 - \lfloor x \rfloor^2 \geq 0$$

$$\lfloor x \rfloor^2 \leq 10$$

$$-\sqrt{10} \leq \lfloor x \rfloor \leq \sqrt{10}$$

Stąd, po uwzględnieniu $-3 \leq \lfloor x \rfloor \leq 3$

możności funkcji $\lfloor x \rfloor$ otrzymamy:

Można rozpatrywać następujące przypadki:

$$\text{I } x \in (-3, -2) \vee \text{II } x \in (-2, -1) \vee \text{III } x \in (-1, 0) \vee \text{IV } x \in (0, 1) \vee \text{V } x \in (1, 2) \vee \text{VI } x \in (2, 3) \vee \text{VII } x \in (3, 4)$$

Wtedy: $\lfloor x \rfloor = -3$

$\lfloor x \rfloor = -2$

$\lfloor x \rfloor = -1$

$\lfloor x \rfloor = 0$

$\lfloor x \rfloor = 1$

$\lfloor x \rfloor = 2$

$\lfloor x \rfloor = 3$

$$\lceil y^2 \rceil = 10 - 9$$

$$\lceil y^2 \rceil = 1$$

$$0 < y^2 \leq 1$$

$$y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$\lceil y^2 \rceil = 6$$

$$5 < y^2 \leq 6$$

$$y \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \sqrt{6})$$

$$\lceil y^2 \rceil = 9$$

$$8 < y^2 \leq 9$$

$$y \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$$

$$\lceil y^2 \rceil = 10$$

$$9 < y^2 \leq 10$$

$$y \in (-\sqrt{10}, -3) \cup (3, \sqrt{10})$$

$$\lceil y^2 \rceil = 9$$

$$y \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$$

$$\lceil y^2 \rceil = 6$$

$$5 < y^2 \leq 6$$

$$y \in (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \sqrt{6})$$

$$\lceil y^2 \rceil = 1$$

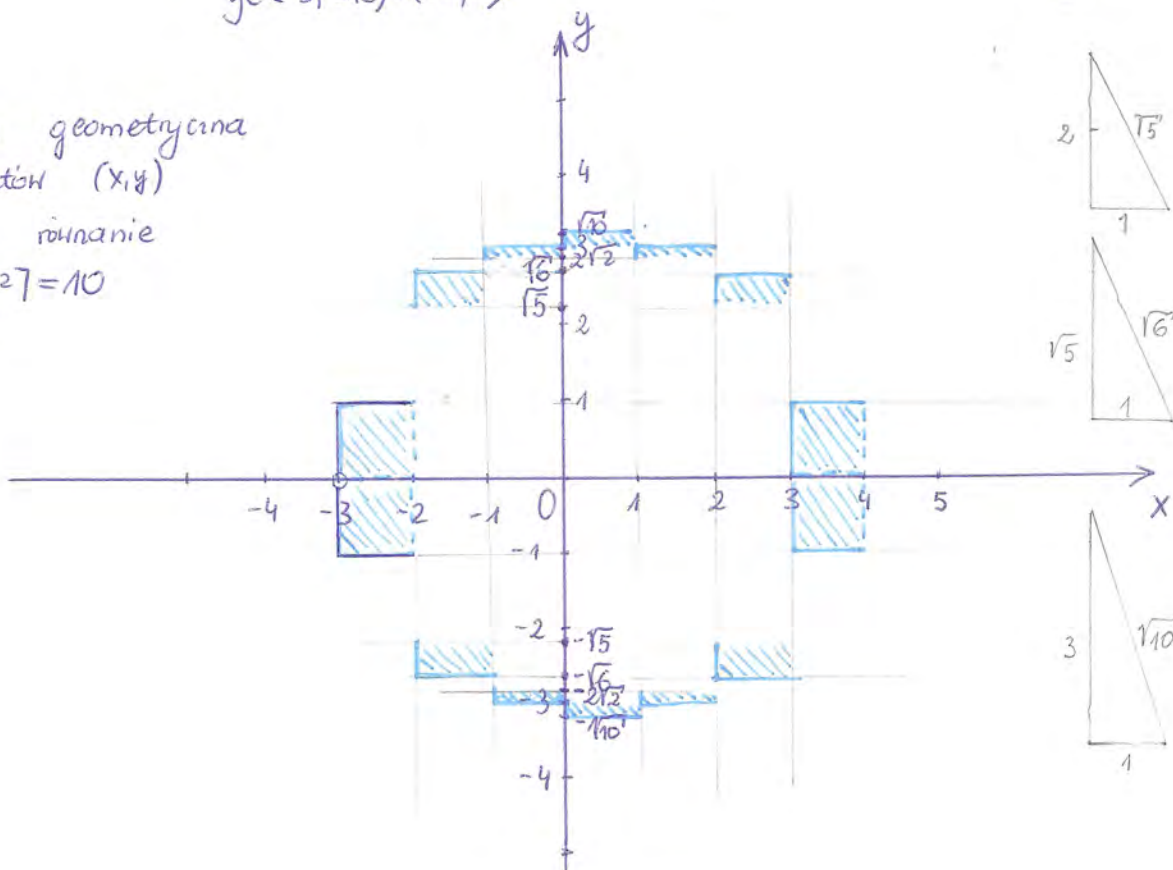
$$y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Interpretacja geometryczna

zbioru punktów (x, y)

spełniających równanie

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lceil y^2 \rceil = 10$$



Zadanie 4: Rozwiązać równanie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = 4$$

gdzie $a_n = n \cdot \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$

$$1 \cdot \frac{x^2}{2^0} + 2 \cdot \frac{x^4}{2} + 3 \cdot \frac{x^6}{2^2} + 4 \cdot \frac{x^8}{2^3} + \dots = 4$$

Lewa strona równania można zamienić na podsumy:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{x^2}{2^0} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2^2} + \frac{x^8}{2^3} + \dots &= \frac{\frac{x^2}{2^0}}{1 - \frac{x^2}{2}} \\ \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2^2} + \frac{x^8}{2^3} + \dots &= \frac{\frac{x^4}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} \\ \frac{x^6}{2^2} + \frac{x^8}{2^3} + \dots &= \frac{\frac{x^6}{2^2}}{1 - \frac{x^2}{2}} \\ \frac{x^8}{2^3} + \dots &= \frac{\frac{x^8}{2^3}}{1 - \frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

($|q| < 1$ i $x \neq 0$)
 $|\frac{x^2}{2}| < 1$
 $|x^2| < 2$
 $x^2 < 2$
 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$

dalej po stronami
otrzymamy:

$$\frac{x^2}{2^0} + 2 \cdot \frac{x^4}{2} + 3 \cdot \frac{x^6}{2^2} + 4 \cdot \frac{x^8}{2^3} + \dots = \frac{\frac{x^2}{2^0}}{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{\frac{x^4}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{\frac{x^6}{2^2}}{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{\frac{x^8}{2^3}}{1 - \frac{x^2}{2}} + \dots$$

$$4 = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \left(\frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} \right) \quad ; \text{podstawiając za } x^2 = t, \text{ otrzymujemy:}$$

$$4 = \frac{t}{(1 - \frac{t}{2})^2}, \text{ którego rozwiązaniami są liczby}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 & \text{lub} & & t &= 4 \\ x^2 &= 1 & & & x^2 &= 4 \\ x &= 1 \vee x = -1 & & & x &= 2 \notin D \vee x = -2 \notin D \end{aligned}$$

odp. Rozwiązaniami podanego równania są liczby 1 oraz -1.

Opracowała

Żolanta Milmanowicz