

Zestawy zadań na maturalny egzamin ustny z matematyki - kl. IV D

/ opracowała Jolanta Wilmanowicz, Płock maj 2002 /

ZESTAW I :

1. Dla jakich wartości parametru **m** równanie $\cos 2002x = \frac{1-2m}{m-1}$ nie ma rozwiązania ?
2. Zbadaj przebieg i naszkicuj wykres funkcji **sinus hiperboliczny**, wiedząc, że $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ dla każdego $x \in R$.
3. Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych a i b
$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}, \quad \text{wiedząc, że } \min(a,b) \stackrel{df.}{=} \begin{cases} a & \text{o ile } a < b \\ a(=b) & \text{o ile } a = b \\ b & \text{o ile } a > b \end{cases}$$

* Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \min\left\{|x|, \frac{|x|}{x}\right\}$.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW II :

1. Czy wzory $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ opisują tę samą funkcję?
2. Wykaż, że funkcja $f(x) = e^{-0.5x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$ jest identyczna ze swoją trzecią pochodną.
3. Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych a i b :

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \text{wiedząc, że } \max(a,b) \stackrel{df.}{=} \begin{cases} a & \text{o ile } a > b \\ a(=b) & \text{o ile } a = b \\ b & \text{o ile } a < b \end{cases}$$

* Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \max\left\{|x|, \frac{|x|}{x}\right\}$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

Pobrano ze strony: <http://jolanta.wilmanowicz.pl>

ZESTAW III :

1. Znajdź liczbę całkowitą p , dla której wektory $\vec{a} = [1, \log_2 3, p]$ i $\vec{b} = [3, \log_3 2, 4]$ są prostopadłe.

2. Zbadaj przebieg i narysuj wykres funkcji **kosinus hiperboliczny**, wiedząc, że

$$\begin{array}{c} \diagup \\ x \in R \end{array} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

3. Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$

Znajdź wzór określający n -ty wyraz ciągu.

* Udowodnij indukcyjnie, że znaleziony przez Ciebie wzór opisuje ciąg przedstawiony powyższym sposobem rekurencyjnym.

*/ w przypadku bezbłędnego rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW IV :

1. Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, rozwiąż równanie:

$$\sin 2x = 2x^2 - \pi x + \frac{1}{8}\pi^2 + 1$$

2. Stosując rachunek całkowy wyprowadź wzór na objętość kuli.

3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = xe^{-0.5x^2}$

* Funkcja f spełnia warunki: 1) $f(0)=0$, 2) $\begin{array}{c} \diagup \\ x \neq 0 \end{array} e^{0.5x^2} f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x + e^{\frac{-1}{2x^2}}$

Wyznacz wzór funkcji f .

*/ w przypadku bezbłędnego rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

Pobrano ze strony: <http://jolanta.wilmanowicz.pl>

ZESTAW V :

1. Znajdź równanie płaszczyzny α , do której należy punkt $M=(2,-3,1)$ i która zawiera prostą k o równaniu $\frac{x-1}{5} = y+3 = \frac{z}{2}$.
2. Wyjaśnić, czy zdarzenia wyłączające się, których prawdopodobieństwa są dodatnie mogą być zdarzeniami niezależnymi.
3. Wyznacz przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji $f(x)=5xe^{-x}$.
Czy wykres tej funkcji posiada punkt przegięcia?

*Wykaż, że pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x)=xe^{2x}$ wyraża się wzorem :

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}ne^{2x}+x2^ne^{2x}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW VI :

1. Zbadaj parzystość/nieparzystość funkcji **kosinus hiperboliczny**, wiedząc, że $\triangle_{x \in \mathbb{R}} \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji **kosinus hiperboliczny** w punkcie o odciętej $x_0=0$ należącym do jej wykresu.
2. Czy punkty $A=(1,3,2)$, $B=(0,5,3)$, $C=(-2,9,5)$ mogą być wierzchołkami pewnego trójkąta?
3. Wykaż, że ciąg $(a_n) = \left(\frac{1}{\log_{2^n} 3}\right)$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

*Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW VII :

1. Wskaż skalę podobieństwa przekształcającego figurę f_1 na figurę f_2 wiedząc, że

$$f_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0\} \quad \text{ i } \quad f_2 = \{(x,y): x^2 + y^2 + 4x - 2y = 5\}.$$

2. Dane są prawdopodobieństwa $p_1 = P(A)$ i $p_2 = P(A \cap B)$.

Wiedząc, że zdarzenia A i B są niezależne, wykaż, że $P(A' \cap B') = (1 - p_1)(1 - \frac{p_2}{p_1})$.

3. Wyznacz tak wartość parametru $z \in (1, +\infty)$, aby najmniejsza wartość funkcji $f(x) = z^{x^2 + 2x + 3}$ była rozwiązaniem równania $\log_2 \frac{3x + 7}{x - 1} = 3$.

* Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Znajdź wzór funkcji $f^n(x)$, gdzie $f^n = f \circ f \circ f \dots \circ f$
n

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW VIII :

1. Wyznacz zbiór: $A = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x^2 - 4x + 4} - |5 - x| = 3\}$

2. Wykaż, że funkcja $f(x) = x \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ jest parzysta.

3. Oblicz miarę kąta α nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy tego czworościanu.

* Wykaż, że stosunek objętości wielościanu wypukłego do objętości kuli wpisanej w ten wielościan jest równy stosunkowi pola powierzchni całkowitej tego wielościanu do pola powierzchni kuli.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW IX:

1. Liczbę 2002 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.
2. Sprawdź, że jeśli ABCD jest czworokątnikiem foremnym, to proste AB i CD są prostopadłe.
3. Wykaż, że funkcja Dirichleta

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą wymierną} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

nie posiada granicy w punktach

- a) będących liczbami wymiernymi
- * b) będących liczbami niewymiernymi

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW X:

1. Wykaż, że funkcja $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ jest nieparzysta.
2. Znajdź wartości m, przy których kąt między wektorami $\vec{a} = [-2, 1, 2]$ i $\vec{b} = [1, -1, m]$ jest równy 135° .
3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = e^x - x - 1$.

* Wykaż, że $\bigwedge_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} e^x > 1+x$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XI:

1. Stosując rachunek całkowy, wyprowadź wzór na pole powierzchni kuli.
2. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry, z których jedna jest biała, druga czarna. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek równej 5, pod warunkiem, że wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych oczek na poszczególnych kostkach jest liczbą pierwszą.
3. Wyznacz sumę współczynników wielomianu W i określ stopień tego wielomianu
 $W(x) = (x^3 - x + 1)^{25} + (1 - 2x + 2x^2)^{40}$

*Suma wszystkich współczynników wielomianu P jest równa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

zaś suma współczynników przy nieparzystych potęgach zmiennej równa jest sumie współczynników przy jej parzystych potęgach. Wyznacz resztę R z dzielenia wielomianu P przez dwumian $x^2 - 1$.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej*

Powodzenia ☺

ZESTAW XII:

1. Pod jakim kątem sinusoida przecina tangensoidę w punkcie o odciętej $x_0 = \pi$?
2. W urnie jest 5 kul białych i 5 czarnych. Losujemy z urny kolejno 4 kule, zwracając każdą z wylosowanych do urny przed losowaniem następnej. Podaj rozkład zmiennej losowej oznaczającej liczbę wylosowanych kul białych. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

3. Wykaż, że $\bigtriangleup_{x \in \mathbb{R}_+} \quad \frac{1}{x} + x \geq 2$

*Udowodnij, a że $\bigtriangleup_{\substack{0 < a < 1 \\ 0 < b < 1}} \quad \log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XIII:

1. Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jednej ze ścian i środek krawędzi przeciwległej ściany. Oblicz miarę kąta między przekątnymi otrzymanego przekroju.
2. Czy wykresy funkcji sinus i tangens przecinają się dla argumentów z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$?
Odpowiedź uzasadnij stosownym rachunkiem.
3. Dane są ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych $a_n = n^2 + 2n + 3$ i $b_n = n^2 - 3n + 2$
Dla jakich n zachodzi nierówność: $\log_{0.5} a_n - \log_{0.5} b_n < -1$?

* W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznacz zbiór wszystkich punktów o współrzędnych (x, y) , dla których szereg geometryczny $1 + \log_y x + \dots + \log_y^{n-1} x + \dots$ jest zbieżny.

*/ w przypadku bezbłędnego rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XIV:

1. Dobierz tak wartość parametru m , aby funkcja $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 8mx - 3$ była różnowartościowa.
2. Dane są 3 zdarzenia A, B, C parami niezależne i takie, że jednocześnie nie mogą zachodzić. Zakładamy, że prawdopodobieństwa ich zajścia są jednakowe i równe p . Znajdź wartość p , aby prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A, B, C było największe.
3. Wyznacz $\int \sin^2 x \, dx$.

*Wykaż, że pochodna n -tego rzędu funkcji $f(x) = \sin x$ wyraża się wzorem:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right), \quad n \in N_+$$

*/ w przypadku bezbłędnego rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XV:

1. Stosując rachunek całkowy, wyprowadź wzór na pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l .
2. Korzystając z twierdzenia sinusów, uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta, zaś R – promieniem okręgu opisanego na trójkącie.
3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{1 - \operatorname{sgn}(3 - x^2)}{2}$.

*Rozwiąż nierówność:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} < \frac{1}{x-2}$$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XVI:

1. Wykaż, że funkcja $y = e^x \sin x + \sin 2x$ spełnia równanie :
$$y'' - 2y' + 2y = -2\sin 2x - 4\cos 2x.$$
2. W urnie jest 5 kul białych i 5 czarnych. Losujemy z urny kolejno 4 kule, zwracając każdą z wylosowanych do urny przed losowaniem następnej. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę otrzymanych białych kul.
3. W jakim wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest dwa razy większa od liczby boków?

*Udowodnij metodą indukcji wzór na liczbę przekątnych w n - kącie wypukłym.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XVII:

1. Wiedząc, że $\vec{a} = [4, 3, 4]$ i $\vec{a} + \vec{c} = [5, 6, 7]$, oblicz długość wektora $\vec{c} - \vec{a}$.
2. Pan Kowalski założył w swojej firmie zamek z czterocyfrowym kodem. Aby mógł łatwiej zapamiętać, wybrał kod, w którym suma dwóch pierwszych cyfr jest równa 12, a suma dwóch ostatnich cyfr 10. Ile miał możliwości wyboru kodu?
3. Wykaż, że $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ wiedząc, że $\bigtriangleup_{x \in R} \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ oraz, że

$$\bigtriangleup_{x \in R} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

* Wykaż, że pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x) = \cos x$ wyraża się wzorem:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right), \quad n \in N_+$$

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XVIII :

1. Czy wykres funkcji **sinus hiperboliczny** $\left(\bigtriangleup_{x \in R} \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$ posiada ukośną asymptotę?
2. Wykaż, że jeżeli $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym, zaś A i B są zdarzeniami niezależnymi, to $P(A) = 1 \vee P(B) = 1$.
3. Wyprowadź wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) wiedząc że $a_n = 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + \dots + 2 \cdot 5^{n-1}$
- * wykaż, że liczba $\underset{n}{444} \dots \underset{n}{4888} \dots 9$ jest kwadratem liczby naturalnej.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

Pobrano ze strony: <http://jolanta.wilmanowicz.pl>

ZESTAW XIX:

1. Stosując rachunek całkowy, wyprowadź wzór na objętość stożka.
2. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym strzałem jest równe 0,03. Ile trzeba oddać strzałów, aby prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony co najmniej raz było nie mniejsze od 0,91?
3. Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, rozwiąż równanie : $x^2 - 4x - \sin \frac{\pi}{4} x + 5 = 0$

*Rozwiąż równanie funkcyjne $\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

ZESTAW XX:

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany na chybił trafił punkt z sześcianu o boku 10 cm trafi do kuli wpisanej w ten sześcian.
2. Udowodnij, że jeżeli miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w okrąg tworzą ciąg arytmetyczny, to dwa kąty tego czworokąta są proste.
3. Znajdź takie wartości parametrów **m** i **k**, dla których liczba 3 jest dwukrotnym miejscem zerowym wielomianu: $W_3(x) = x^3 - 5x^2 + mx + k$.

*Wyprowadź wzory Viete'a dla wielomianu stopnia 3.

*/ w przypadku bezbłędneho rozwiązania zadań 1-3, rozwiązanie zadania oznaczonego symbolem * umożliwi Ci uzyskanie oceny celującej /*

Powodzenia ☺

Pobrano ze strony: <http://jolanta.wilmanowicz.pl>